Bull. Sc. math., 2e série.
104, 1980, p. 337-340.

UN ENSEMBLE SINGULIER

PAR

HARVEY FRIEDMAN et MICHEL TALAGRAND (*)
[Ohio State Univ., Columbus; Univ. Pierre-et-Marie-Curie, Paris]

RÉSUMÉ. — On montre sous l'axiome de Martin qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, ayant la puissance du continu, universellement mesurable, maigre dans tout parfait, et tel que si $X \subset \mathbb{R}$ est négligeable (resp. maigre) alors $A+X$ est négligeable (resp. maigre).

ABSTRACT. — Under Martin's axiom, we show that there exists a universally measurable subset A of $\mathbb{R}$, of the same cardinality as $\mathbb{R}$, which is of first category in each perfect set, and such that if $X \subset \mathbb{R}$ is negligible (resp. of first category), $A+X$ is negligible (resp. of first category).

Pour deux ensembles A et B de $\mathbb{R}$ posons $A+B=\{a+b;\ a \in A,\ b \in B\}$ et désignons par λ la mesure de Lebesgue. Il est démontré dans [2] que pour tout sous-ensemble analytique A non dénombrable de $\mathbb{R}$, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(K)=0$ et $\lambda(A+K)>0$ (et même $A+K$ peut être choisi d'intérieur non vide). Il est donc naturel de se demander s'il en est toujours de même lorsque on n'impose pas de condition de régularité sur A. Dans ce travail, on montre sous l'axiome de Martin [1] que la réponse est négative. L'ensemble construit va rassembler également d'autres pathologies. On désigne par $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres dyadiques.

THÉORÈME. — *Sous l'axiome de Martin, il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :*

1° *A possède la puissance du continu;*

2° *pour tout sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(X)=0$, on a $\lambda(A+X)=0$;*

(*) Texte présenté par G. Choquet, reçu le 18 mai 1979.

Classification matières AMS(MOS) 1980 : primaire 03 E 72; secondaire 03 E 50, 28 C 10.
Vedettes-matières : Mesure, Projection, Compacts.

Harvey FRIEDMAN, Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus, Ohio 43210, États-Unis.

Michel TALAGRAND, Équipe d'Analyse, Tour 46, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

3° *pour tout sous-ensemble X maigre de $\mathbb{R}$, $A+X$ est maigre;*

4° *pour tout sous-ensemble G de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{D}$ et est un G_δ, on a* card $(A \setminus G) <$ card $\mathbb{R}$. *En particulier, A est universellement mesurable;*

5° *pour tout sous-ensemble parfait K de $\mathbb{R}$, $A \cap K$ est maigre dans K.*

Preuve. — Soit φ l'application qui à toute partie $N \subset \mathbb{N}$ associe le réel $\sum_{p \in N} 2^{-p}$. Pour $M \subset \mathbb{N}$, on notera B_M l'ensemble des $\varphi(N)$ pour $N \subset M$.

Désignons par ω_1 le premier ordinal ayant la puissance du continu. D'après le théorème 4 de [1], pour $\alpha < \omega_1$, et toute famille $(N_\beta)_{\beta<\alpha}$ de parties de $\mathbb{N}$ telle que pour $\beta < \gamma < \alpha$, $N_\beta \setminus N_\gamma$ soit finie, il existe $N \subset \mathbb{N}$ telle que $N_\beta \setminus N$ soit finie pour $\beta < \alpha$.

Disons qu'une partie N de $\mathbb{N}$ *domine* la suite (m_k) de $\mathbb{N}$ si le k-ième élément de N est $\geq m_k$. Le résultat précédent permet par une induction immédiate de construire une famille $(N_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ de parties de $\mathbb{N}$, ayant les propriétés suivantes :

6° si $\beta \leq \alpha$, $N_\beta \setminus N_\alpha$ est fini;

7° pour toute suite (m_k) il existe α tel que N_α domine la suite (m_k).

On désigne par A l'ensemble des $\varphi(N_\alpha)$ pour $\alpha < \omega_1$. Puisque φ est injective sur le complémentaire d'un ensemble dénombrable, A vérifie 1°. La preuve des autres propriétés de A est basée sur le lemme suivant :

LEMME. — *Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble négligeable (resp. $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble rare; G un G_δ de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{D}$; K un ensemble parfait de $\mathbb{R}$).*

Alors il existe une suite (m_k) telle que si $M \subset \mathbb{N}$ domine (m_k) on a $\lambda(B_M + X) = 0$ (resp. $B_M + X$ est rare; $B_M \subset G$; $d + B_M$ est rare dans K pour tout $d \in \mathbb{D}$).

Preuve du lemme. — (*a*) Soit $X \subset \mathbb{R}$ tel que $\lambda(X) = 0$. Pour tout $p \geq 0$ il existe un ouvert $U_p \supset X$ avec $\lambda(U_p) \leq 2^{-2p}$. On peut écrire $U_p = \bigcup_n U_p^n$, où chaque U_p^n est une réunion finie d'intervalles, et où $\sum_n 2^n \lambda(U_p^n) \leq 2^{1-2p}$.

Soit m_k une suite telle que pour $n, p \leq k$ on ait

$$\lambda(U_p^n + [0, 2^{1-m_k}]) \leq 2\lambda(U_p^n).$$

Soit $M \subset \mathbb{N}$ une partie qui domine (m_k). Pour tout l, on a $B_M \subset H_l + [0, 2^{1-m_l}]$, où card $H_l \leq 2^l$. On a donc pour tout p :

$$B_M + U_p \subset \bigcup_n (B_M + U_p^n)$$

$$\subset \left(\bigcup_{n \leq p} H_p + [0, 2^{1-m_p}] + U_p^n\right) \cup \left(\bigcup_{n > p} H_n + [0, 2^{1-m_n}] + U_p^n\right)$$

d'où

$\lambda(B_M + U_p) \leq \sum_{n \leq p} 2^{p-1} \lambda$

Ceci étant vrai pour tout p
premier point.

Pour prouver les trois a

$C_n =$

Il est clair que C_n est co

(*b*) Soit X un ensemble
une base d'ouverts de
$W_p \not\subset C_k + X + [0, 2^{1-m_k}]$ po
qui est rare comme réunio
ensemble dominant (m_k). Po
donc $W_k \not\subset \overline{B_M + X}$, ce qui

(*c*) Soit G un G_δ de $\mathbb{R}$ c
ouvert. Soit (m_k) une suite
domine (m_k), alors pour to
$B_M \subset G$.

(*d*) Soit K un parfait de
$d_p + C_k$ étant dénombrable
Choisissons (m_k) de sorte qu
M domine (m_k), alors pou
$B_m \subset C_k + [0, 2^{1-m_k}]$, ce qui

La preuve du lemme est

Revenons à la preuve du t
tel que N_α domine (m_k). Pou
On a donc $A = A' \cup A''$ où

Si (m_k) est la suite de
$A + X \subset A' + X \cup A'' + X$.
$\lambda(\mathbb{D} + B_{N_\alpha} + X) = 0$, d'où $\lambda(A$
théorème 3 de [1], ce qui pr
similaire.

Soit G un sous-ensemble d
G par $\bigcap_{d \in \mathbb{D}} G + d$, on peut su
le troisième cas du lemme,

d'où

$$\lambda(B_M + U_p) \leqslant \sum_{n \leqslant p} 2^{p+1} \lambda(U_p^n) + \sum_{n > p} 2^{n+1} \lambda(U_p^n)$$
$$\leqslant 2^{p-1} \sum_n 2^n \lambda(U_p^n) \leqslant 2^{2-p}.$$

Ceci étant vrai pour tout p, on a $\lambda(B_M + X) = 0$, ce qui termine la preuve du premier point.

Pour prouver les trois autres, introduisons pour $n > 0$, l'ensemble

$$C_n = \left\{ \sum_{i \leqslant m} 2^{-k_i} ;\ k_i \geqslant i,\ m \leqslant n \right\}.$$

Il est clair que C_n est compact, et on a $C_n \subset \mathbb{D}$.

(*b*) Soit X un ensemble rare de $\mathbb{R}$ que l'on peut supposer fermé, et (W_p) une base d'ouverts de $\mathbb{R}$. Choisissons la suite m_k de sorte que $W_p \not\subset C_k + X + [0, 2^{1-m_k}]$ pour $p \leqslant k$. Ceci est possible car $C_n + X$ est un fermé, qui est rare comme réunion dénombrable de translatés de X. Soit $M \subset N$ un ensemble dominant (m_k). Pour tout k on a $B_M + X \subset C_k + X + [0, 2^{1-m_k}]$. On a donc $W_k \not\subset \overline{B_M + X}$, ce qui montre que $B_M + X$ est rare.

(*c*) Soit G un G_δ de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{D}$. On a $G = \cap_p G_p$ où chaque G_p est ouvert. Soit (m_k) une suite telle que $C_k + [0, 2^{1-m_k}] \subset \cap_{p \leqslant k} G_p$. Si $M \subset \mathbb{N}$ domine (m_k), alors pour tout k on a $B_M \subset C_k + [0, 2^{1-m_k}] \subset \cap_{p \leqslant k} G_p$, d'où $B_M \subset G$.

(*d*) Soit K un parfait de $\mathbb{R}$ et (d_p) une énumération de $\mathbb{D}$. Pour tous p et k, $d_p + C_k$ étant dénombrable est rare dans K. Soit (V_n) une base d'ouverts de K. Choisissons (m_k) de sorte que $V_n \not\subset (d_p + C_k + [0, 2^{1-m_k}]) \cap K$ pour $n, p \leqslant k$. Si M domine (m_k), alors pour tous n et p on a $V_n \not\subset (d_p + \overline{B_M}) \cap K$ puisque $\overline{B_m} \subset C_k + [0, 2^{1-m_k}]$, ce qui montre que $d_p + \overline{B_M}$ est rare dans K.

La preuve du lemme est terminée.

Revenons à la preuve du théorème. Soit (m_k) une suite de $\mathbb{N}$. Il existe $\alpha < \omega_1$ tel que N_α domine (m_k). Pour $\gamma \geqslant \alpha$, $N_\alpha \setminus N_\gamma$ est finie, donc $\varphi(N_\gamma) \in \mathbb{D} + B_{N_\alpha}$. On a donc $A = A' \cup A''$ où card. $A' <$ card. $\mathbb{R}$ et $A'' \subset \mathbb{D} + B_{N_\alpha}$.

Si (m_k) est la suite donnée par le premier cas du lemme, on a $A + X \subset A' + X \cup A'' + X$. Or $\lambda(B_{N_\alpha} + X) = 0$, d'après le lemme, d'où $\lambda(\mathbb{D} + B_{N_\alpha} + X) = 0$, d'où $\lambda(A'' + X) = 0$. D'autre part $\lambda(A' + X) = 0$ d'après le théorème 3 de [1], ce qui prouve 2°. On prouve 3° de manière exactement similaire.

Soit G un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{D}$ et qui est un G_δ. En remplaçant G par $\bigcap_{d \in \mathbb{D}} G + d$, on peut supposer $G + \mathbb{D} = G$. Si (m_k) est la suite donnée par le troisième cas du lemme, on a $A'' \subset \mathbb{D} + B_{N_\alpha} \subset G$. Donc $A \setminus G \subset A'$, ce qui prouve la première assertion de 4°. Pour toute mesure μ diffuse sur $\mathbb{R}$ il existe G, un G_δ de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{D}$ avec $\mu(G)=0$. Puisque $\mu(A\setminus G)=0$ d'après le théorème 3 de [4] on a $\mu(A)=0$, ce qui montre que A est universellement mesurable.

Si (m_k) est la suite donnée par le quatrième cas du théorème, on a $A''\cap K\subset\bigcup_{d\in\mathbb{D}}(d+B_{N_k})\cap K$ qui est maigre d'après le lemme. Et $A'\cap K$ est maigre d'après le théorème 7 de [1] ce qui termine tout.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SHOENFIELD (J. R.). — Martin's Axiom, *Amer. math. Monthly*, vol. 82, 1975, p. 610-617.

[2] TALAGRAND (M.). — Sommes vectorielles d'ensembles de mesure nulle, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 26, n° 3, 1976, p. 137-172.