Bull. Sc. math., 2e série,
102, 1978, p. 49-56.

SÉLECTION MESURABLE DE MESURES MAXIMALES SIMPLICIALES

PAR

MICHEL TALAGRAND

[Paris, Université Pierre-et-Marie-Curie]

RÉSUMÉ. — Soit X un convexe compact. Lorsque X est métrisable (resp. possède une base d'ouverts de cardinal $\leqslant \aleph_1$) on montre qu'à chaque point de X on peut associer une mesure maximale simpliciale qui le représente, et ceci par une application de première classe de Baire (resp. mesurable quand X est muni de sa tribu borélienne, et l'ensemble des mesures de probabilité sur X de sa tribu de Baire).

ABSTRACT. — Let X be a compact convex set. When X is metrizable (resp. has a basis of open sets of cardinal $\leqslant \aleph_1$) we prove that there exists a first Baire class map (resp. a map which is measurable when X is provided with his Borel σ-algebra and the space of probabilities on X is provided with his Baire σ-algebra) which sends each point of X on a representating maximal simplicial measure.

Soit X un convexe compact d'un espace localement convexe séparé. Munissons l'ensemble $M_+^1(X)$ des mesures de probabilité sur X de la topologie vague. Pour $x \in X$, désignons par M_x l'ensemble des mesures maximales pour l'ordre de Choquet qui représentent x [1] et par MS_x l'ensemble des mesures maximales simpliciales représentant x, c'est-à-dire l'ensemble des points extrémaux de M_x. Dans le cas où X est métrisable, l'existence d'une sélection borélienne $x \to m_x \in MS_x$ a été établie par W. SMITH [3] (*voir* aussi [2]). Nous allons étendre ce résultat dans deux directions. Tout d'abord, lorsque X est métrisable, nous allons montrer l'existence d'une sélection $x \to m_x \in MS_x$ de première classe de Baire, ce qui est le meilleur résultat possible puisque lorsque X est un simplexe l'application qui associe à un point de X la mesure maximale qui le représente n'est pas continue si l'ensemble des points extrémaux de X n'est pas fermé. Ensuite nous montrerons que, si X possède une base d'ouverts de cardinal $\leqslant \aleph_1$, il existe une sélection $x \to m_x \in MS_x$ qui est mesurable lorsque X est muni de la tribu des boréliens et $M_+^1(X)$ de la tribu des boréliens de Baire.

Désignons par $S(X)$ l'ensemble des fonctions continues convexes sur X et par $r(\mu)$ la résultante d'une mesure $\mu \in M_+^1(X)$.

THÉORÈME 1. — *Pour tout convexe compact métrisable X, il existe une sélection* $x \to m_x \in MS_x$ *de première classe de Baire.*

Démonstration. — Puisque $\mathscr{C}(X)$ est séparable, il en est de même de $S(X)$. Il existe donc une suite (f_n) de $S(X)$, telle que pour tout n on ait $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, et que l'ensemble des fonctions $a f_n + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$, $a \geqslant 0$) soit dense dans $S(X)$.

Soit k l'application de $M_+^1(X)$ dans $l^2 = l^2(\mathbf{N})$ qui envoie μ sur $(2^{-n}\mu(f_n))$. Cette application est affine, injective puisque $S(X)$ étant total dans $\mathscr{C}(X)$, la suite f_n est totale dans $\mathscr{C}(X)$, et continue comme on voit sans peine. Son image K est un convexe compact de l^2, contenu dans la boule unité et dans le cône positif l_+^2 de l^2. Pour $x \in X$, posons $K_x = \{u \in K; r(k^{-1}(u)) = x\}$. C'est un convexe compact non vide de l^2. Pour tout fermé F de l^2, l'ensemble des $x \in X$ tels que $F \cap K_x \neq \varnothing$ est égal à $r(k^{-1}(F))$, et est donc un fermé de X. Ce fait sera d'un usage constant.

Désignons par $\|\,.\,\|$ et $(.\,|\,.)$ la norme et le produit scalaire de l^2, et pour $t \in \mathbf{R}$ par $B(t)$ la boule fermée de l^2 de centre 0 et de rayon t. Pour $u \in l^2$, $u \neq 0$ et $a \in \mathbf{R}$, $a \geqslant 0$, définissons

$$D(u, a) = \left\{ v \in l^2; \left(v \,\middle|\, \frac{u}{\|u\|} \right) \geqslant \|u\| - a \right\},$$

$$C(u, a) = D(u, a) \cap B(\|u\|).$$

Ainsi $D(u, a)$ est un demi-espace fermé, et $C(u, a)$ une calotte sphérique fermée. Si on désigne par $d(F)$ le diamètre d'un ensemble F de l^2, un calcul élémentaire prouve que si $a \leqslant \|u\|$ on a

$$d(C(u, a)) = 2\|u\| \sin\left(\operatorname{Arc\,cos}\left(1 - \frac{a}{\|u\|}\right)\right)$$

et que $d(C(u, a)) = 2\|u\|$ sinon. Il existe donc une fonction η de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$, de limite nulle en zéro, et telle que

$$(1) \qquad \|u\| \leqslant 10 \;\Rightarrow\; d(C(u, a)) \leqslant \eta(a).$$

Pour $u, w \in l^2$, $a, t \in \mathbf{R}^+$ posons

$$\begin{aligned} D(w, u, a) &= w + D(u, a) \\ C(w, u, a) &= w + C(u, a) \\ B(w, t) &= w + B(t). \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire et fastidieux (ou un argument de compacité) montre qu'il existe une fonction ζ_n strictement positive de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathbf{R}^{+}$ telle que pour $1 \leqslant \| u \| \leqslant 3$ on ait

$$\operatorname{Inf}\{\| v-w-2^{-n-2} u \| ; v \in D(w, u, a), \| v-w \| \geqslant \| u \|-\zeta_n(a)\}$$
$$> \operatorname{Sup}\{\| v-w-2^{-n-2} u \| ; v \in B(w, \| u \|), v \notin D(w, u, 2 a)\}.$$

Il existe donc une suite (ε_r) de réels > 0 telle que

(2) $$\varepsilon_0=1 ; \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon_n<\operatorname{Inf}(\zeta_n(\varepsilon_{n-1}), 2^{-n-1} \operatorname{Inf}_{k<n} \varepsilon_k)$$

(3) $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 2 \eta(4 \varepsilon_n)<\varepsilon_{n-1}.$$

Nous allons construire par induction sur n des partitions finies $\mathscr{A}_n$ de X, et des familles finies $(u_A)_{A \in \mathscr{A}_n}$, $(w_A)_{A \in \mathscr{A}_n}$ d'éléments de l^2 vérifiant les conditions suivantes :

(a) $\mathscr{A}_n$ raffine $\mathscr{A}_{n-1}$;

(b) chaque élément de $\mathscr{A}_n$ est intersection d'un ouvert et d'un fermé;

(c) pour $A \in \mathscr{A}_n$, on a $u_A \in l_+^2$, $-w_A \in l_+^2$, $1 \leqslant \| u_A \| \leqslant 3-2^{-n}$, $1 \leqslant \| w_A \| \leqslant 2-2^{-n}$;

(d) pour $x \in A \in \mathscr{A}_n$, on a $K_x \cap D(w_A, u_A, 4 \varepsilon_n) \subset C(w_A, u_A, 4 \varepsilon_n)$;

(e) pour $x \in A \in \mathscr{A}_n$, on a $K_x \cap D(w_A, u_A, \varepsilon_n) \not\subset B(w_A, \| u_A \|-\varepsilon_{n+1})$;

(f) si $A \in \mathscr{A}_n$, $B \in \mathscr{A}_{n-1}$, $A \subset B$, on a $w_A=w_B-2^{-n-2} u_B$ et $d(w_A+u_A, C(w_B, u_B, 2 \varepsilon_{n-1})) \leqslant \varepsilon_{n+1}$.

Convenons que $\mathscr{A}_{-1}=\{X\}$, et que $u_X=-w_X$ est un élément quelconque de l_+^2 de norme 1.

Le premier pas étant analogue au cas général, nous allons supposer la construction effectuée jusqu'au rang n et montrer comment partitionner un élément fixé $A \in \mathscr{A}_n$. Pour alléger la notation, on pose $u=u_A$, $w=w_A$, $w'=w-2^{-n-3} u$. On a donc

$$1 \leqslant \| w \| \leqslant \| w' \| \leqslant \| w \|+2^{-n-1} \leqslant 2-2^{-n-1}.$$

Pour $x \in A$, soit t_x un point de $K_x \cap D(w, u, 4 \varepsilon_n)$ tel que

(4) $$\| t_x-w' \|=\operatorname{Sup}\{\| v-w' \| ; v \in K_x \cap D(w, u, 4 \varepsilon_n)\}.$$

Il résulte de (2) et (3) que l'on a $t_x \in D(w, u, 2 \varepsilon_n)$, ce qui est le point crucial.

Pour $p \in \mathbf{N}$, posons

$$A_p=\{x \in A ;(p-1) \varepsilon_{n+2} \leqslant \operatorname{Sup}\{\| v-w' \| ; v \in K_x \cap D(w, u, 2 \varepsilon_n)\}<p \varepsilon_{n+2}\}.$$

Puisque A est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé, il en est de même de A_p. Fixons p tel que $A_p \neq \emptyset$. Il suffit de construire une partition $(A_{p,l})_{1 \leq l \leq q}$ de A_p et des $u_l = u_{A_{p,l}}$ vérifiant les conditions (a) à (f).

Posons $L = \{v \in D(w, u, 2\varepsilon_n) \cap K ; (p-1)\varepsilon_{n+2} \leq \|v-w'\| \leq p\varepsilon_{n+2}\}$.

Pour $v \in L$, on a $v \in \dot{D}(w', p\,\varepsilon_{n+2}(v-w')/(\|v-w'\|), \varepsilon_{n+1})$. Puisque L est compact, on peut le recouvrir par une famille finie

$$D_1 = D(w', u_1, \varepsilon_{n+1}), \ldots, D_q = D(w', u_q, \varepsilon_{n+1})$$

pour des u_l ($1 \leq l \leq q$) tels que $u_l \in l^2_+$ (puisque $-w' \in l^2_+$ et $L \subset l^2_+$). Puisque pour $v \in L$ on a $\|v-w'-p\,\varepsilon_{n+2}(v-w')/(\|v-w'\|)\| \leq \varepsilon_{n+2}$, on en déduit que pour chaque l on a $d(w'+u_l, C(w, u, 2\varepsilon_n)) \leq \varepsilon_{n+2}$. De plus, pour chaque l, puisque $u, w \in l^2_+$, $L \subset l^2_+$, et que u_l est de la forme

$$p\,\varepsilon_{n+2}\frac{v-w'}{\|v-w'\|},$$

avec $v \in L$, on a :

$$\begin{aligned} 1 < \|w\| \leq \|v-w'\| &\leq p\,\varepsilon_{n+2} = \|u_l\| \\ &\leq \varepsilon_{n+2} + \|v-w'\| \leq 2^{-n-3}+1+\|w'\| \\ &\leq 2^{-n-3}+1+2-2^{-n}+3.2^{-n-3} = 3-2^{-n-1}. \end{aligned}$$

Pour $x \in A_p$, le point t_x défini en (4) appartient à $D(w, u, 2\varepsilon_n)$. Par définition de A_p on a alors $t_x \in L$, ce qui montre que $K_x \cap L \neq \emptyset$. Pour $1 \leq l \leq q$ posons

$$A_{p,l} = \{x \in A_p ;\ l = \operatorname{Inf}\{i ;\ 1 \leq i \leq q,\ K_x \cap D_i \cap L \neq \emptyset\}\}.$$

Pour $x \in A_p$ on a $K_x \cap L \neq \emptyset$, et puisque les ensembles $(D_i)_{i \leq q}$ recouvrent L, les ensembles $A_{p,l}$ forment une partition de A_p. Chacun d'eux est intersection d'un ouvert et d'un fermé. Pour $1 \leq l \leq q$ posons $u_{A_{p,l}} = u_l$. Les choix précédents montrent que les conditions (a) à (f), sauf peut-être la condition (d), sont vérifiées. Pour terminer la construction il suffit donc de montrer que pour $x \in A_{p,l}$ on a

$$K_x \cap D(w', u_l, 4\varepsilon_{n+1}) \subset C(w', u_l, 4\varepsilon_{n+1}).$$

On sait déjà que $K_x \cap D(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1}) \neq \emptyset$. Puisque cet ensemble est convexe, donc connexe, et que $C(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1})$ est fermée il suffit de prouver que

$$K_x \cap D(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1}) \cap D(w, u, 4\,\varepsilon_n) \subset C(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1})$$

et que $C(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1}) \subset \mathring{D}(w, u, 4\,\varepsilon_n)$.

Le premier point résulte de ce que pour $x \in A_{p,\,l}$, on a

$$K_x \cap D(w, u, 4\,\varepsilon_n) \subset B(w', p\,\varepsilon_{n+2}) = B(w', \|u_l\|)$$

et donc

$$\begin{aligned} &K_x \cap D(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1}) \cap D(w, u, 4\,\varepsilon_n) \\ &\quad \subset D(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1}) \cap B(w', \|u_l\|) = C(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n-1}). \end{aligned}$$

D'autre part, le diamètre de $C(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1})$ est au plus $\eta\,(4\,\varepsilon_{n+1}) < \varepsilon_n$, et puisque $d(w'+u_l, C(w, u, 2\,\varepsilon_n)) \leqslant \varepsilon_n$, on a

$$(w'+u_l-w \mid u/\|u\|) \geqslant \|u\|-3\,\varepsilon_n,$$

donc puisque $w'+u_l \in C(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1})$ on a aussi

$$v \in C(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1}) \Rightarrow (v-w \mid u/\|u\|) > \|u\|-4\,\varepsilon_n$$

ce qui montre que $C(w', u_l, 4\,\varepsilon_{n+1}) \subset D(w, u, 4\,\varepsilon_n)$. La construction est terminée.

Définissons les fonctions ρ_n, σ_n de X dans l^2 par $\rho_n(x) = u_A$, $\sigma_n(x) = w_A$ pour $x \in A \in \mathscr{A}$, puis posons $\theta_n(x) = \sigma_n(x)+\rho_n(x)$. Cette fonction est de première classe de Baire d'après (*b*). D'après (*a*) et (*f*) et (1) on a $\|\theta_n-\theta_{n+1}\| \leqslant \varepsilon_n/2$ pour tout n (en désignant encore par $\|\ .\ \|$ la norme uniforme sur l'espace des fonctions bornées de X dans l^2). Pour $p \geqslant n$, on a donc, d'après (2) :

$$\|\theta_p-\theta_n\| \leqslant \textstyle\sum_{l=n} \varepsilon_{l-1}/2 \leqslant \varepsilon_{n-1}.$$

Il en résulte que la suite θ_n converge uniformément vers une fonction θ, qui est donc de première classe de Baire. Pour tout n, on a $\|\theta-\theta_n\| \leqslant \varepsilon_{n-1}$. Puisque d'après (*e*), pour tout n, K_x rencontre $C(\sigma_n(x), \rho_n(x), 4\,\varepsilon_n)$, la distance de $\theta(x)$ à K_x est au plus $2\,\varepsilon_{n-1}$, ce qui montre que $\theta(x) \in K_x$.

D'après (*a*) et (*f*) on a $d(\theta_n(x), D(\sigma_{n-1}(x), \rho_{n-1}(x), 2\varepsilon_{n-1}) \leqslant \varepsilon_{n-1}$, et puisque $\|\theta(x)-\theta_n(x)\| \leqslant \varepsilon_{n-1}$ on voit sans peine que

$$\theta(x) \in D(\sigma_{n-1}(x), \rho_{n-1}(x), 4\varepsilon_{n-1}).$$

Prouvons que $\theta(x)$ est extrémal dans K_x. Supposons que $\theta(x) = (u+v)/2$, où $u, v \in K_x$. Soit $n \geqslant 0$. Puisque le complémentaire d'un demi-espace est, convexe on a par exemple $u \in D(\sigma_n(x), \rho_n(x), 4\varepsilon_n)$. D'après (*d*), $\theta(x)$ et u appartiennent à $C(\sigma_n(x), \rho_n(x), 4\varepsilon_n)$, donc :

$$\forall n, \qquad \|u-v\| = 2\|u-\theta(x)\| \leqslant \varepsilon_{n-1}$$

ce qui montre que $u = v$.

Prouvons que $(\theta(x)+l_+^2) \cap K_x = \{\theta(x)\}$. Si $v \in \theta(x)+l_+^2$, on a, pour tout n, $v \in D(\sigma_n(x), \rho_n(x), 4\varepsilon_n)$, puisque d'après (*c*) on a

$$(v-\theta(x) \mid \rho_n(x)), \geqslant 0.$$

On a donc $v \in C(\sigma_n(x), \rho_n(x), 4\varepsilon_n)$ d'après (*d*), ce qui montre que $v = \theta(x)$.

Posons $m_x = k^{-1}(\theta(x))$. Puisque k est un homéomorphisme de $M_+^1(X)$ sur K, l'application $x \to m_x$ est de première classe de Baire. De plus, puisque $\theta(x) \in K_x$, m_x représente x.

Prouvons que m_x est maximale. Si μ majore m_x (et donc représente x) on a $m_x(f_n) \leqslant \mu(f_n)$ pour tout n. Ceci montre que $k(\mu) \in (\theta(x) + l_+^2) \cap K_x = \{\theta(x)\}$ donc que $k(\mu) = \theta(x) = k(m_x)$ et $\mu = m_x$.

Si $m_x = 1/2(\mu_1+\mu_2)$, où $r(\mu_1) = r(\mu_2) = x$, on a

$$k(m_x) = \theta(x) = 1/2(k(\mu_1)+k(\mu_2)),$$

avec $k(\mu_1)$, $k(\mu_2) \in K_x$, donc $k(\mu_1) = k(\mu_2)$, ce qui montre que m_x est extrémale dans l'ensemble des mesures qui représentent x, et donc simpliciale puisque elle est maximale.

C.Q.F.D.

Remarque. — Il est beaucoup plus facile d'établir l'existence d'une sélection $x \to m_x \in M_x$ de première classe de Baire [4].

Supposons maintenant que X ne soit pas nécessairement métrisable. La tribu des boréliens de Baire de $M_+^1(X)$ (tribu engendrée par les compacts G_δ) est la moins fine rendant mesurables les fonctions continues sur $M_+^1(X)$. Le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(M_+^1(X))$ formé des fonctions $\mu \to \mu(f)$ pour $f \in \mathscr{C}(X)$ sépare les points de $M_+^1(X)$. Il engendre donc une sous-algèbre dense de $\mathscr{C}(M_+^1(X))$. Il en résulte que la tribu des boréliens de Baire de $M_+^1(X)$ est la moins fine rendant mesurables les fonctions $\mu \to \mu(f)$ pour $f \in \mathscr{C}(X)$. Ainsi lorsque $M_+^1(X)$ est muni de sa tribu de Baire, la mesurabilité d'une application $x \to m_x$ de X dans $M_+^1(X)$ équivaut à celle des fonctions $x \to m_x(f)$, pour $f \in \mathscr{C}(X)$.

THÉORÈME 2. — *Supposons que X possède une base d'ouverts de cardinal $\leqslant \aleph_1$. Il existe alors une sélection $x \to m_x \in MS_x$ de X dans $M_+^1(X)$, mesurable lorsque X est muni de sa tribu borélienne et $M_+^1(X)$ de la tribu des boréliens de Baire.*

Démonstration. — Il est classique que la condition sur X de l'énoncé implique que $\mathscr{C}(X)$, donc aussi $S(X)$, contient une partie dense de cardinal $\leqslant \aleph_1$. Soit $(f_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ une telle partie (Ω désignant le premier ordinal non dénombrable).

Désignons par h l'application $\mu \to (r(\mu), (\mu(f_\alpha))_\alpha)$ de $M_+^1(X)$ dans $E \times \mathbf{R}^{[0,\Omega[}$. Elle est affine, continue et injective. Son image est un convexe compact K.

Désignons par π la projection canonique de $E \times \mathbf{R}^{[0,\Omega[}$ sur E, par π_α celle sur $E \times \mathbf{R}^{[0,\alpha[}$.

Construisons par induction une famille u_α de fonctions numériques définies sur X, vérifiant les conditions suivantes (où l'on pose $v_\alpha(x) = (x, (u_\beta(x))_{\beta<\alpha})$:

(*a*) u_α est borélienne;

(*b*) $v_\alpha(x) \in \pi_\alpha(K)$, $\forall\, x \in X$;

(*c*) $u_\alpha(x) = \sup\{t;\, (v_\alpha(x), t) \in \pi_{\alpha+1}(K)\}$.

Le premier pas étant analogue au cas général, supposons cette construction effectuée pour tout $\beta < \alpha$. Si α est de la forme $\gamma+1$, la condition (*b*) est vérifiée puisque (*c*) l'est au rang γ. Si α est limite, pour $\beta < \gamma$ le compact $K \cap \pi_\beta^{-1}(v_\beta(x))$ est non vide par hypothèse. Cette famille de compacts est filtrante décroissante, donc son intersection, qui n'est autre que $K \cap \pi_\alpha^{-1}(v_\alpha(x))$, est non vide, ce qui montre que la condition (*b*) est encore vérifiée.

Il est donc possible de définir u_α à l'aide de (*c*), puisque pour tout z de $\pi_\alpha(K)$ il existe un t tel que $(z, t) \in \pi_{\alpha+1}(K)$.

Pour terminer la construction, il suffit de prouver que u_α est borélienne. L'application $z \to \sup\{t;\, (z, t) \in \pi_{\alpha+1}(K)\}$ de $\pi_\alpha(K)$ dans $\mathbf{R}$ est s. c. i. d'après la compacité de $\pi_{\alpha+1}(K)$. D'autre part, l'application $x \to v_\alpha(x)$ est borélienne. Pour le voir il suffit de remarquer que tout ouvert de $X \times \mathbf{R}^{[0,\alpha[}$

est réunion dénombrable de produits $V \times \Pi_{\beta < \alpha} 0_\beta$, où V est un ouvert de X et 0_β est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, à extrémités rationnelles, égal à $\mathbf{R}$ sauf pour un nombre fini d'indices, et que l'image réciproque d'un tel ouvert par v_α est borélienne, ce qui termine la construction.

Définissons $m_x = h^{-1}(V_\Omega(x))$. On a déjà $r(m_x) = \pi(V_\Omega(x)) = x$. Montrons que m_x est maximale. Soit μ majorant m_x. Pour tout α, on a $\mu(f_\alpha) \geqslant m_x(f_\alpha)$. Supposons $\mu \neq m_x$. La famille (f_α) étant totale, il existe des indices α tels que $\mu(f_\alpha) \neq m_x(f_\alpha)$. Soit γ le plus petit d'entre eux. Puisque

$$\alpha < \gamma \quad \Rightarrow \quad \mu(f_\alpha) = m_x(f_\alpha) = u_\alpha(x),$$

on a $\pi_\gamma(h(\mu)) = v_\gamma(x)$. Ainsi $(v_\gamma(x), \mu(f_\gamma)) \in \pi_{\gamma+1}(K)$, ce qui d'après ($c$) prouve que $m_x(f_\gamma) < \mu(f_\gamma) \leqslant m_x(f_\gamma)$. Cette absurdité établit que $\mu = m_x$, donc que m_x est maximale. L'extrémalité de m_x se prouve de façon très similaire.

Pour tout α la fonction $x \to m_x(f_\alpha)$ est borélienne. Il en est donc de même de la fonction $x \to m_x(f)$ où $f \in \mathscr{C}(X)$ puisque la famille des f_α est totale, ce qui termine tout.

C.Q.F.D.

Remarque. — En général, il n'existe pas de sélection $x \to m_x \in MS_x$, qui soit mesurable quand $M_+^1(X)$ est muni de sa tribu borélienne. En effet, l'ensemble des mesures de Dirac est fermé dans $M_+^1(X)$, et son image réciproque est exactement $\mathscr{E}(X)$, qui peut ne pas être borélien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] PHELPS (R. R.). — Lectures on Choquet's theorem, Van Nostrand *Math. Studies*. American Book. Van Nostrand-Reinhold.

[2] RAO (M.). — Measurable selection of representating measures, *quaterly J. of Math.*, Series 2, t. 22, 1971, p. 571-572.

[3] SMITH (W.). — Measurable selection of simplicial maximal measures, *J. London math. Soc.*, Series 2, t. 7, 1973, p. 427-428.

[4] TALAGRAND (M.). — Sélection mesurable de mesures maximales, *Séminaire Choquet* (*Initiation à l'analyse*), 15e année, 1975-1976, communication n° 3, 4 p.

(Texte reçu le 3 juin 1977,
présenté par G. Choquet, modifié le 21 novembre 1977.)

Michel TALAGRAND,
Équipe d'Analyse, Tour 46,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.