Bull. Sc. math., 2e série,
101, 1977, p. 415-422.

SUR LA STRUCTURE BORÉLIENNE DES ESPACES ANALYTIQUES

PAR

MICHEL TALAGRAND
[Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris]

RÉSUMÉ. — Soit (X, τ) un espace topologique analytique (non nécessairement métrisable). On étudie le comportement de la tribu $B(X)$ des boréliens de X lorsque l'on affaiblit τ en une topologie τ'. On montre que $B(X, \tau)$ est contenue dans la tribu engendrée par $B(X, \tau')$ et les sous-espaces analytiques de X. On montre que tout ouvert pour τ est un F_σ ssi il en est de même pour τ'. On décrit une situation générale où $B(X, \tau) = B(X, \tau')$ et on en déduit que si un espace de Banach dual E' est sous-espace d'un espace WCG, les boréliens de la topologie de la norme coïncident avec ceux de la topologie $\sigma(E', E)$. On montre enfin que si on peut choisir τ' métrisable, il existe une topologie τ'' plus fine que τ telle que (X, τ'') soit analytique et τ'' métrisable.

SUMMARY. — Let (X, τ) be an analytic (non metrizable) topological space. We study what happens to the σ algebra $B(X)$ of Borel sets of X when we weaken τ to a topology τ'. We prove that $B(X, \tau)$ is contained in the σ algebra generated by $B(X, \tau')$ and the analytic subspaces of X. We prouve that each open set is an F_σ for τ iff it is the same for τ'. We describe a general situation in which $B(X, \tau') = B(X, \tau)$, from which we deduce that if a conjugate Banach space E^* is a subspace of a WCG space, the Borel sets for the norm and the weak* topology coincide. We show that if τ' can be chosen metrizable, then there exists a metrizable topology τ'' stronger than τ for which X remains analytic.

1. Rappels et notations

Désignons par S (resp. Σ) l'ensemble des suites finies (resp. infinies) d'entiers. On munira Σ de la topologie usuelle. Étant donné $s \in S$ et $\sigma \in \Sigma$ on écrira $s \prec \sigma$ si s consiste des n premiers termes de σ, où n est la longueur de s. On posera $\tilde{s} = \{\sigma \in \Sigma ; s \prec \sigma\}$. Cet ensemble est donc ouvert et fermé.

Soit X un espace topologique et f une application de Σ dans $\mathfrak{P}(X)$. Pour toute partie Y de Σ, posons $f(Y) = \bigcup_{\sigma \in Y} f(\sigma)$. On dit que f est semi-continue supérieurement à valeurs compactes (s.c.s.c.) si elle est à valeurs compactes ou vides, et si pour $\sigma \in \Sigma$ et tout voisinage V de $f(\sigma)$, il existe un voisinage U de σ tel que $f(U) \subset V$.

Nous dirons suivant [6] qu'un espace topologique est analytique s'il est régulier et image de Σ par une application s.c.s.c. Un espace topologique complètement régulier est analytique au sens précédent si et seulement s'il est $\mathscr{K}$-analytique au sens de Choquet, c'est-à-dire image continue d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace compact ([6], 4-15).

La tribu $Ba(X)$ (resp. $B(X)$) des boréliens de Baire (resp. des boréliens) d'un espace topologique X est par définition la tribu engendrée par les ouverts F_σ (resp. les ouverts) de X.

Si X est analytique, on a $Ba(X) = B(X)$ si et seulement si tout ouvert de X est un F_σ ([6], th. 5.9). De plus, puisque $Y \in Ba(X)$ si et seulement si Y et $X \setminus Y$ sont analytiques ([6], th. 5.8), pour toute topologie régulière τ' moins fine que la topologie τ de X on a (avec des notations évidentes) $Ba(X, \tau) = Ba(X, \tau')$. La situation est beaucoup moins simple pour $B(X)$.

2. Comparaison de $B(X, \tau)$ et $B(X, \tau')$

Avant d'aborder les résultats positifs, prouvons par un exemple qu'en général on a $B(X, \tau) \neq B(X, \tau')$. Étant donné une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'espaces topologiques, que l'on peut supposer disjoints, désignons par $X = \tilde{\coprod}_{i \in I} X_i$ l'espace $\bigcup_{i \in I} X_i \cup \{\infty\}$ muni de la topologie qui coïncide sur chaque X_i avec la topologie de X_i, qui rend chaque X_i ouvert, et qui admet pour base de voisinages du point ∞ les complémentaires des réunions finies d'espaces X_i. Si les X_i sont analytiques il en est de même de X. En effet X est alors régulier, et si pour chaque f_i désigne une application s.c.s.c. de Σ sur X_i, l'application f de Σ sur X qui envoie σ sur $\bigcup_i f_i(\sigma) \cup \{\infty\}$ est encore s.c.s.c., et on a $f(\Sigma) = X$. Construisons l'exemple annoncé. Soit $I = [0, 1]$ et Ω le premier ordinal non dénombrable. Pour $\alpha < \Omega$ soit B_α un borélien de $[0, 1]$ de classe $\geqslant \alpha$. Soient $X_\alpha = I$ et Y_α l'espace topologique obtenu en rajoutant B_α comme ouvert-fermé à la topologie de I. Étant réunion de deux espaces analytiques, Y_α est analytique. L'espace $Y = \tilde{\coprod}_{\alpha < \Omega} Y_\alpha$ est donc analytique. L'espace (compact) $X = \tilde{\coprod}_{\alpha < \Omega} X_\alpha$ n'est autre que Y munie d'une topologie moins fine. Le sous-ensemble $B = \bigcup_{\alpha < \Omega} B_\alpha \cup \{\infty\}$ est fermé dans Y. Il n'est pas borélien dans X, puisque pour tout borélien Z de X la classe du borélien $Z \cap X_\alpha$ est nécessairement bornée.

La vérification du lemme standard suivant est laissée au lecteur.

LEMME 1. — *Soient X un espace analytique et f une application s.c.s.c. de Σ sur X. Soient $\sigma \in \Sigma$, A un fermé de X et V un ouvert de X tel que $A \cap f(\sigma) \subset V$. Alors il existe $s \prec \sigma$ tel que $A \cap \overline{f(\tilde{s})} \subset V$.*

Soient toujours X et f comme dans le lemme précédent, et soit τ' une topologie régulière moins fine que la topologie τ de X. Pour chaque suite finie s choisissons un ensemble X_s tel que $f(\tilde{s}) \subset X_s \subset \overline{f(\tilde{s})}$.

THÉORÈME 2. — *Tout ouvert de τ est de la forme $\bigcup_{s \in S} X_s \cap V_s$, où V_s est un ouvert de τ'.*

Soient V un ouvert de τ et $x \in V$. Il existe $\sigma_x \in \Sigma$ tel que $x \in f(\sigma_x)$. Puisque τ' est régulière il existe un voisinage V_x ouvert de x et tel que $\overline{V_x}^{\tau'} \cap f(\sigma) \subset V$. Puisque $\overline{V_x}^{\tau'}$ est fermé pour τ, il existe d'après le lemme 1 une suite finie s_x telle que $s_x \prec \sigma_x$ et que

$$x \in V_x \cap X_{s_x} \subset \overline{V_x}^{\tau'} \cap \overline{f(\tilde{s}_x)} \subset V.$$

On a donc

$$V = \bigcup_{x \in V} V_x \cap X_{s_x} = \bigcup_{s \in S} X_s \cap \left(\bigcup_{s_x = s} V_x\right) = \bigcup_{s \in S} X_s \cap V_s,$$

où $V_s = \bigcup_{s_x = s} V_x$ est un ouvert de τ'.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3. — *$B(X, \tau)$ est contenue dans la plus petite famille $\mathscr{A}$ de sous-ensembles de X qui est stable par intersections et réunions dénombrables, et qui contient les ouverts de τ' et les sous-ensembles analytiques de (X, τ').*

La tribu $B(X, \tau)$ est la plus petite famille de parties de X contenant les ouverts et les fermées de (X, τ) et qui est stable par réunions et intersections dénombrables. Il suffit donc de prouver que tout fermé et tout ouvert de (X, τ) sont dans $\mathscr{A}$. C'est évident pour les fermés, et résulte du théorème 2, où l'on choisit $X_s = f(\tilde{s})$ pour les ouverts.

C.Q.F.D.

Remarque. — Il résulte de ([6], 4.4 et 4.11), que les sous-ensembles analytiques de (X, τ) et (X, τ') sont les mêmes.

COROLLAIRE 4. — *On a $Ba(X, \tau) = B(X, \tau)$ si et seulement si $Ba(X, \tau') = B(X, \tau')$.*

La nécessité est évidente, puisque alors

$$Ba(X, \tau') \subset B(X, \tau') \subset B(X, \tau) = Ba(X, \tau) = Ba(X, \tau').$$

Réciproquement, puisque tout ouvert de τ' est alors analytique, il résulte du théorème 2 (où l'on choisit $X_s = f(\tilde{s})$) que tout ouvert de τ est analytique. Il est alors de Lindëlof ([6], 4.6) donc F_σ ce qui montre que $B(X, \tau) = Ba(X, \tau)$.

COROLLAIRE 5. — *Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur X telles que (X, τ_1) et (X, τ_2) soient analytiques. Supposons l'une des deux conditions suivantes vérifiée :*

(i) *il existe une topologie τ_3 plus fine que τ_1 et τ_2 et telle que (X, τ_3) soit analytique;*

(ii) *il existe une topologie τ séparée moins fine que τ_1 et τ_2, alors on a $Ba(X, \tau_1) = B(X, \tau_1)$ si et seulement si $Ba(X, \tau_2) = B(X, \tau_2)$.*

Le premier cas résulte du corollaire 5, appliqué successivement aux couples (τ_1, τ_3) et (τ_2, τ_3). Le second cas se réduit au premier. En effet X muni de la topologie $\tau_3 = \sup(\tau_1, \tau_2)$ est analytique, puisqu'il s'identifie à la diagonale du produit des espaces (X, τ_1) et (X, τ_2) et que cette diagonale est fermée d'après l'existence de τ.

COROLLAIRE 6. — *Si on peut choisir $X_s \in B(X, \tau')$, alors*

$$B(X, \tau) = B(X, \tau').$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 2. Un premier cas important est celui où $\overline{f(\tilde{s})}^{\tau'}$ est fermé pour τ' et un second celui où f est telle que $f(\sigma) \cap f(\rho) = \emptyset$ si $\sigma \neq \rho$. En effet, puisque alors $X \setminus f(\tilde{s}) = f(\Sigma \setminus \tilde{s})$ est analytique on a $f(\tilde{s}) \in Ba(X, \tau')$. (Remarquons que dans ce cas tout fermé de (X, τ) est image de Σ par une application s.c.s.c. telle que $f(\sigma) \cap f(\rho) = \emptyset$ si $\sigma \neq \rho$, et le fait qu'il soit borélien pour τ' résulte aussi d'un théorème beaucoup plus général ([6], 7.4).)

3. Applications aux espaces de Banach

Rappelons qu'un espace de Banach est dit *WCG* s'il contient un compact faible total.

PROPOSITION 7. — *Soient E un espace de Banach qui est sous-espace d'un espace WCG et F un sous-espace de E'. Supposons la condition suivante vérifiée :*

$$\exists k > 0; \quad \forall x \in E, \quad \sup\{f(x); \quad f \in F; \quad \|f\| \leqslant 1\} \geqslant k\|x\|. \quad (C)$$

Alors les tribus boréliennes de E pour les topologies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E, F)$ sont identiques.

Soit H un espace de Banach *WCG* contenant E, et G le sous-espace de H' formé des éléments dont la restriction à E appartient à F. Puisque E muni de la topologie $\sigma(E, F)$ (resp. $\sigma(E, E')$) est un sous-espace topologique de H muni de $\sigma(H, G)$ (resp. $\sigma(H, H')$), les boréliens de E pour $\sigma(E, F)$ (resp. $\sigma(E, E')$) sont les traces sur E des boréliens de H pour $\sigma(H, G)$ (resp. $\sigma(H, H')$), et il suffit donc d'établir le résultat pour H et G.

Soit l un réel tel que $l \leqslant k/4$ (on a donc $l \leqslant 1/2$ puisque $k \leqslant 1$). Prouvons que pour $x \in H$, on a $\sup\{g(x); g \in G, \|g\| \leqslant 1\} \geqslant l\|x\|$. En appliquant le théorème de Hahn-Banach à l'espace H/E on voit qu'il existe $g \in H'$ telle que $g(x) = d(x, E)$, $\|g\| \leqslant 1$ et $g = 0$ sur E. On a donc $g \in G$, ce qui prouve le résultat si $d(x, E) \geqslant l\|x\|$. Si $d(x, E) < l\|x\|$, il existe $y \in E$ tel que $\|x-y\| < l\|x\|$. On a donc

$$\|y\| > (1-l)\|x\| > 1/2\,\|x\|.$$

D'après la condition (C) et le théorème de Hahn-Banach, il existe $g \in G$ telle que $\|g\| \leqslant 1$ et $g(y) \geqslant k/2\,\|x\|$. On a donc

$$y(x) \geqslant g(y) - g(x-y) \geqslant k/2\,\|x\| - l\|x\| \geqslant l\|x\|,$$

ce qui établit notre assertion. Posons

$$B = \{x \in H;\ \forall g \in G,\ \|g\| \leqslant 1 \Rightarrow g(x) \leqslant 1\}.$$

Il résulte de ce qui précède que B est *bornée*. De plus B est $\sigma(E, G)$ *fermé*. L'adhérence B'' de B dans l'espace H'' muni de la topologie $\sigma(H'', H)$ est compacte. Soit K un compact faible total de H, que l'on peut supposer disqué d'après le théorème de Krein. La preuve de [7] montre que

$$H = \bigcap_n \bigcup_m \left(mK + \frac{1}{n} B''\right),$$

où $mK + (1/n)\,B''$ est compacte pour $\sigma(H'', H)$. On en déduit sans peine que si on pose

$$f(\sigma) = \bigcap_n \left(\sigma(n)K + \frac{1}{n} B\right),$$

l'application f est s.c.s.c., que $f(\Sigma) = X$ et on vérifie que

$$f(\tilde{s}) = \bigcap_{n \leqslant |s|} \left(s(n)K + \frac{1}{n} B\right),$$

où $|s|$ désigne la longueur de s. Puisque K est faiblement compact, il est compact pour $\sigma(H, G)$. Puisque de plus B est $\sigma(H, G)$ fermé, on en déduit que $m K+(1/n) B$ est $\sigma(H, G)$ fermé pour tous m et n, donc que $f(\tilde{s})$ est $\sigma(H, G)$ fermé. Le résultat découle alors du corollaire 6.

PROBLÈME. — Le résultat subsiste-t-il si on suppose seulement que F sépare E et que E est un e.B. $\mathcal{K}$? (*voir* [8]).

THÉORÈME 8. — *Soient E un espace de Banach qui est sous-espace d'un espace WCG et F un sous-espace du dual de E' vérifiant la condition* (C). *Alors sur E les tribus boréliennes de la topologie de la norme et de $\sigma(E, F)$ coïncident.*

Il suffit de conjuguer le résultat précédent, le théorème 1 de [4], chapitre 5, paragraphe 5 qui affirme que E admet une norme équivalente localement uniformément connexe, et le théorème 1.1 de [5] qui affirme qu'alors les tribus boréliennes de la norme et de la topologie faible coïncident.

COROLLAIRE 9. — *Sur un espace de Banach dual E' qui est sous-espace d'un espace WCG les tribus boréliennes de la norme et de la topologie $\sigma(E', E)$ coïncident.*

PROBLÈME. — *Le résultat précédent est-il encore exact si l'on suppose seulement que E' possède la propriété de Radon-Nikodym* ?

Nous allons prouver un résultat partiel dans cette direction qui montre en particulier que si les tribus boréliennes de la norme et de topologie $\sigma(E', E)$ coïncident alors E' possède la propriété de Radon-Nikodym. (Ce résultat n'est pas relié directement au reste de ce travail.) Rappelons qu'on dit qu'une partie d'un espace compact possède la propriété de Baire si et seulement si elle est égale à un ensemble ouvert modulo un ensemble maigre.

PROPOSITION 10. — *Un espace de Banach dual E' possède la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si tout borélien de E' pour la norme possède la propriété de Baire (pour $\sigma(E', E)$) dans tout sous-ensemble $\sigma(E', E)$ compact de E'.*

Si E possède la propriété de Radon-Nikodym, il existe d'après un résultat de Stegall (*voir* [4], ch. 6, § 6) un sous-espace séparable F de E et un sous-ensemble K de F', discret en norme, et homéomorphe à l'ensemble de Cantor pour la topologie $\sigma(E', E)$. Soit A un sous-ensemble de K qui ne possède pas la propriété de Baire relativement à cette topologie. Il est néanmoins borélien pour la norme, comme tout sous-ensemble de K. Soit π la projection canonique de E' sur F'. Puisque K est borné, et d'après le théorème de Zorn, il existe un ensemble L de E', qui est $\sigma(E', E)$ compact, tel que $\pi(L) = K$, et minimum vis-à-vis de l'ensemble de ces deux propriétés. Alors $\pi^{-1}(A) \cap L$ est borélien pour la norme, mais il résulte de [3], lemme 2 C que cet ensemble ne possède pas la propriété de Baire dans L.

Réciproquement, si E possède la propriété de Radon-Nikodym, d'après [2] tout $\sigma(E', E)$ compact L de E' contient un G_δ dense sur lequel sa topologie coïncide avec la topologie de la norme. La trace d'un borélien pour la topologie de la norme sur ce G_δ est donc un borélien pour $\sigma(E', E)$, et le résultat découle de ce que dans un espace compact les boréliens possèdent la propriété de Baire.

C.Q.F.D.

4. Topologies analytiques moins fines qu'une topologie métrisable

Dans [1] G. Choquet a prouvé qu'un espace analytique métrisable est image continue de Σ. Les idées du paragraphe 2 vont nous permettre de préciser ce résultat.

Théorème 11. — *Soit (X, τ) un espace analytique tel qu'il existe une topologie métrisable τ_1 moins fine que τ. Il existe alors une topologie métrisable τ_2 plus fine que τ et telle que (X, τ_2) soit encore analytique. En particulier (X, τ) est image continue de Σ.*

Soit f une application s.c.s.c. de Σ sur (X, τ), et $X_s = \overline{f(\tilde{s})}^{\tau}$. Puisque τ_1 est métrisable on a $B(X, \tau_1) = Ba(X, \tau_1)$. Il résulte du corollaire 4 que tout ouvert de τ est analytique pour τ, donc pour τ_1.

Soit τ_2 la moins fine topologie plus fine que τ_1 qui rende ouverts les ensembles X_s et leurs complémentaires. Il est clair que τ_2 est métrisable. Pour $s \in S$, désignons par τ_2^s la moins fine topologie plus fine que τ_1 qui rende ouverts X_s et X_s^c. Pour cette topologie X est analytique puisque réunion des analytiques X_s et X_s^c. On montre comme lors de la preuve du corollaire 6 que X muni de $\tau_2 = \operatorname{Sup}_{s \in S} \tau_2^s$ est encore analytique. D'après le théorème 2, tout ouvert de τ est de la forme $\bigcup_{s \in S} X_s \cap V_s$, où V_s est ouvert pour τ_1, ce qui montre que τ_2 est plus fine que τ_1.

C.Q.F.D.

Remarque. — Sous les hypothèses précédentes, la topologie τ n'est pas nécessairement métrisable. Considérons par exemple l'espace $\mathscr{C}_K(\mathbf{R})$

des fonctions réelles à support compact muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi \to \| \varphi f \|_\infty$ où f est une fonction continue > 0 quelconque. Cette topologie est plus fine que la topologie (métrisable) de la convergence uniforme, et est analytique puisque pour $n \in \mathbf{N}$ elle coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur le sous-ensemble de $\mathscr{C}_K(\mathbf{R})$ constitué des fonctions dont le support est contenu dans $[-n, n]$. Il est cependant facile de voir qu'elle n'est pas métrisable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). — Ensembles $\mathscr{K}$-analytiques et $\mathscr{K}$-sousliniens : cas général et cas métrique, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 9, 1959, p. 75-89.

[2] BOURGAIN (J.). — Sets with the Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces (à paraître).

[3] BOURGAIN (J.), FREMLIN (D. H.) et TALAGRAND (M.). — Pointwise compact sets of measurable functions, *Amer. J. of Math.* (à paraître).

[4] DIESTEL (J.). — *Geometry of Banach spaces. Selected topics*. Berlin, Springer-Verlag, 1975 (*Lecture Notes in Mathematics*, 485).

[5] EDGAR (G. A.). — Measurability in a Banach space, *Indiana Univ. math. J.* (à paraître).

[6] FROLICK (Z.). — A survey of separable descriptive theory of sets and spaces, *Czechoslovak math. J.*, t. 20 (95), 1970, p. 406-467.

[7] TALAGRAND (M.). — Sur une conjecture de H. H. Corson, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 99, 1975, p. 211-212.

[8] TALAGRAND (M.). — Espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques, *C.R. Acad. Sc. Paris*, Série A, t. 284, 1977, p. 745-748.

(Texte reçu le 25 mars 1977,
présenté par G. Choquet.)

Michel TALAGRAND,
Équipe d'Analyse, C.N.R.S.-E.R.A. 294,
Mathématiques, Tour 46,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.