Bull. Sc. math., 2e série,
99, 1975, p. 211-212.

SUR UNE CONJECTURE DE H. H. CORSON

par

MICHEL TALAGRAND

RÉSUMÉ. — On démontre le théorème suivant : Un espace de Banach WCG (weakly compactly generated) est Lindelöf pour sa topologie faible.

Rappellons qu'un espace de Banach est dit WCG (weakly compactly generated) si et seulement s'il possède une partie faiblement compacte totale.

Dans [1], H. H. CORSON pose le problème suivant, « Est-il vrai qu'un espace de Banach est WCG et si seulement s'il est Lindelöf pour sa topologie faible? ».

Cette question fait également l'objet du problème 2 de [3].

THÉORÈME. — *Tout espace de Banach WCG est Lindelöf pour sa topologie faible.*

Démonstration. — Soit E un espace de Banach possédant un compact faible total C. En vertu du théorème de Krejn, on peut supposer que C est un disque. L'espace E se plonge canoniquement dans son bidual E''. Désignons par B'' la boule unité de E''.

Puisque C est un disque, l'espace vectoriel engendré par C est $\bigcup_n nC$. Puisque C est total, pour tout entier $p > 0$, on a

$$E = (\bigcup_n nC) + \frac{1}{p} B \subset (\bigcup_n nC) + \frac{1}{p} B'' \subset E + \frac{1}{p} B''.$$

Puisque E est fermé dans E'' (pour la topologie d'espace de Banach de E''), on a enfin :

$$E = \bigcap_p \bigcup_n \left(nC + \frac{1}{p} B'' \right).$$

Quels que soient n et p, l'ensemble $nC + (1/p) B''$ est $\sigma(E'', E')$ compact, comme somme vectorielle de deux $\sigma(E'', E')$ compacts. Ainsi E est un $K_{\sigma\delta}$ faible de E''. Il découle des résultats de [2] (§ 9) que E, pour sa topologie faible est $\mathcal{K}$-analytique. Et l'on sait, d'après [5], que tout espace $\mathcal{K}$-analytique est Lindelöf.

C. Q. F. D.

Comme nous l'a fait remarquer J. LINDENSTRAUSS, la réciproque est fausse. En effet, H. P. ROSENTHAL a récemment construit [4] un espace de Banach E qui est WCG et qui contient un sous-espace fermé F qui n'est pas WCG. Il s'ensuit que F est Lindelöf, et même $\mathcal{K}$-analytique (puisqu'il est faiblement fermé dans E, et que E, d'après le résultat précédent, est $\mathcal{K}$-analytique pour sa topologie faible) pour sa topologie faible sans être WCG.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CORSON (H. H.). — The weak topology of a Banach space, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 101, 1961, p. 1-15.

[2] CHOQUET (G.). — *Lectures on analysis*, t. 1. — New York, W. A. Benjamin, 1969 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[3] LINDENSTRAUSS (J.). — Weakly compact sets, their topological properties and the Banach spaces they generate, « *Symphosium on Infinite dimensional topology* », p. 235-273. — Princeton, Princeton University Press, 1972. (*Annals of mathematics studies*, 69).

[4] ROSENTAL (H. P.). — The heredity problem for weakly compactly generated spaces, *Compositio Math.*, Groningen, t. 28, 1974, p. 83-111.

[5] SION (M.). — On analytic sets in topological spaces, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 96, 1960, 341-354.

(Texte reçu le 9 juin 1975.)

Michel TALAGRAND,
Équipe d'Analyse, Tour 46,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.