Bull. Sc. math., 2e série.
104, 1980, p. 225-231.

SUR LA MESURE DE LA PROJECTION D'UN COMPACT ET CERTAINES FAMILLES DE CERCLES

PAR

MICHEL TALAGRAND (*)
[Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris]

RÉSUMÉ. — On montre que pour toute fonction réelle positive ou nulle et s.c.s. de période π sur $\mathbb{R}$, il existe un compact K du plan tel que la mesure de la projection orthogonale de K sur la direction d'angle α soit égale à $f(\alpha)$. On en déduit qu'il existe un ensemble de cercles du plan dont la réunion est de mesure nulle, quoique l'ensemble des centres soit de mesure linéaire non nulle.

ABSTRACT. — We show that given any positive real u.s.c. function of period π on $\mathbb{R}$, there exist a compact K of the plane such that the linear measure of its orthogonal projection on the direction of angle α is $f(\alpha)$. We deduce that there exist a family of circles of the plane whose union is of measure zero, but such that the set of centers is of non zero linear measure.

Soit K un compact du plan euclidien. Étant fixée une direction origine, désignons par $h_\alpha(K)$ la mesure de Lebesgue de la projection orthogonale de K sur la direction qui fait un angle α avec la direction origine. La fonction $f(\alpha)=h_\alpha(K)$ est $\geqslant 0$, de période π, et on voit sans peine qu'elle est semi-continue supérieurement (s.c.s.). Le principal résultat de ce travail est d'établir que la fonction $f(\alpha)$ ne vérifie pas d'autres conditions c'est-à-dire :

THÉORÈME 1. — *Soit f une fonction réelle, $\geqslant 0$, de période π et s.c.s. Il existe alors un compact K du plan tel $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha)=h_\alpha(K)$.*

Cette recherche a été provoquée par une question de J. Saint Raymond, à qui est due la méthode de la preuve de la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Il existe une famille de cercles du plan dont la réunion est de mesure nulle, mais dont l'ensemble des centres est de mesure linéaire non nulle.*

(*) Texte présenté par G. CHOQUET, reçu le 9 avril 1979.

Classification matières AMS (MOS) 1980 : primaire 28 A 20; secondaire 28 A 75.
Vedettes-matières : Mesure. Projection. Compacts.

Michel TALAGRAND, Équipe d'Analyse, Tour 46, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

Démonstration. — Fixons un repère orthonormé et pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ désignons par $C_{a,b}$ le cercle d'équation

$$X^2 + Y^2 - 2aX - b = 0.$$

Si A désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, désignons par $\mathscr{C}_A$ la famille des cercles $C_{a,b}$ pour $(a, b) \in A$. Pour que la mesure de la réunion de la famille $\mathscr{C}_A$ soit nulle, il suffit que pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, la mesure linéaire de l'ensemble des intersections des cercles de $\mathscr{C}_A$ avec la droite verticale d'abscisse λ soit nulle, c'est-à-dire la mesure de l'ensemble $\{\sqrt{-\lambda^2 + 2a\lambda + b};\ (a, b) \in A,\ 2a\lambda - b - \lambda^2 \leqslant 0\}$. Ceci est le cas dès que l'ensemble $E_\lambda = \{2a\lambda + b;\ a, b \in A\}$ est de mesure nulle. Or, à une dilatation près, cet ensemble est la projection de l'ensemble A sur l'axe des abscisses parallèlement à une droite *non verticale*. Le théorème 1 affirme que l'on peut choisir A de sorte que chaque E_λ soit de mesure nulle mais que l'ensemble $E = \{a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ (a, b) \in A\}$ soit de mesure > 0. Le résultat en découle (il résulte en fait des méthodes qui vont suivre que l'on peut supposer que E contient un segment de droite).

Le problème suivant, malgré son caractère bien particulier, nous semble aussi intéressant que difficile (nous en ignorons l'auteur).

PROBLÈME 3. — *Existe-t-il une famille de cercles du plan dont la réunion soit de mesure nulle, mais telle que tout point du plan soit centre d'un cercle de la famille ?*

Ainsi que nous l'a fait remarquer Saint Raymond, il découle immédiatement d'un résultat récent de STEIN et NAINGER ([1], théorème A) que le problème correspondant dans $\mathbb{R}^2$, où l'on remplace cercles par sphères, a une réponse *négative*.

Nous allons maintenant établir le théorème 1. Sa démonstration sera le couronnement d'une série de lemmes. Une démonstration formelle de chacun d'eux serait un supplice, autant pour le lecteur que pour l'auteur. Aussi, nous n'hésiterons pas à faire largement appel à l'intuition géométrique du lecteur pour les points non cruciaux; il pourra rétablir de lui-même les détails.

Nous appellerons compact *élémentaire* du plan une réunion finie de polygones convexes d'intérieur non vide. Tous les angles considérés le seront modulo π. Nous désignerons par D_α la droite de direction α passant par l'origine, par p_α la projection orthogonale sur D_α et par λ_α la mesure de Lebesgue de D_α.

LEMME 4. — *Si K est un compact élémentaire, réunion de n convexes, la fonction $h_\alpha(K)$ satisfait*

$$|h_\alpha(K) - h_\beta(K)| \leqslant n \times \text{diamètre}(K) \times |\beta - \alpha|.$$

Preuve. — Le cas $n=1$ est aisé et laissé au lecteur. On procède ensuite par induction en remarquant que

$$|h_\alpha(K \cup L) - h_\alpha(K)| \leqslant h_\alpha(L).$$

LEMME 5 (technique de zébrures). — *Soit K un compact élémentaire, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors $L \subset K$, réunion finie de rectangles dont deux cotés sont de direction α et tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) $$p_\alpha(L) \leqslant \varepsilon,$$

(2) $$|\beta - \alpha| \geqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad h_\beta(L) \geqslant h_\beta(K) - \varepsilon.$$

Preuve. — L'idée est la suivante : soit $\vec{u}$ un vecteur perpendiculaire à D_α et $F_\eta = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} D_\alpha + p\eta\vec{u}$. Il est clair que pour η assez petit $M = F_\eta \cap K$ satisfait (1) et (2). Il suffit alors de remplacer chaque segment dont M est formée par un rectangle assez mince (et un peu plus court pour qu'il soit contenu dans K) pour obtenir L.

Le lemme suivant est beaucoup plus inattendu, aussi nous allons le démontrer en détail.

LEMME 6 (technique des lamelles). — *Soit R un rectangle de largeur l et de longueur $L \geqslant l$. Soient ξ et ξ' deux réels tels que $0 < \xi < \xi' < \pi/2$. Si α désigne l'angle de la direction des côtés de longueur L, il existe un compact élémentaire $K \subset R$ tel que :*

(i) $\beta \in [\alpha, \alpha + \xi] \Rightarrow h_\beta(K) \leqslant 5\,l$;

(ii) $\beta \notin [\alpha, \alpha + \xi] \Rightarrow h_\beta(K) = h_\beta(R)$.

(Ce lemme est donc remarquable quand l est très petit.)

Preuve. — On peut supposer $\alpha = 0$. Si $\operatorname{tg}\xi' \leqslant l/L$, on voit sans peine que $h_\beta(K) \leqslant 2\,l$ pour $\beta \in [0, \xi]$, et on peut donc choisir $K = R$. Sinon il existe un réel θ tel que

$$\operatorname{tg}\xi < l/2\theta L < \operatorname{tg}\xi' \qquad \text{et} \qquad \theta \leqslant 1/2.$$

Nous allons tout d'abord décrire un procédé général de génération de parallélogrammes. Soit $P = ABCD$ un parallélogramme dont les côtés AB et CD sont verticaux $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD})$ et les côtés AC et BD de pente t. On définit $f_1(P)$ comme étant le parallélogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$ où

$$A_1 = A, \qquad B_1 = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{2},$$

$$C_1 = A + \left(\frac{1}{2} + \theta\right)\overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}, \qquad D_1 = C_1 + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}.$$

On définit $f_2(P)$ comme étant le translaté de $f_1(P)$ par le vecteur $((1/2)-\theta)\overrightarrow{AC}$, et on appelle $A_2 B_2 C_2 D_2$ ses sommets. Soit a la longueur de AB et b celle de la projection horizontale de AC.

Des calculs élémentaires montrent que :

(a) la pente des côtés non verticaux de $f_1(P)$ et $f_2(P)$ est $t' = t + (a/(1+2\theta)b)$;

(b) la projection sur l'axe des ordonnées de $f_1(P) \cup f_2(P)$ parallèlement à une droite de pente comprise entre t et t' a une mesure $\leqslant a$;

(c) la pente de $A_2 D_1$ est égale à $t + (a/2\theta b)$.

Il résulte de cette dernière condition que si une droite de pente $\geqslant t + (a/2\theta b)$ rencontre AC et BD, alors, soit elle rencontre $A_1 C_1$ et $B_1 D_1$, soit elle rencontre $A_2 C_2$ et $B_2 C_2$. Enfin une droite de pente $\leqslant 0$ qui rencontre P rencontre $f_1(P) \cup f_2(P)$.

Définissons par induction une famille $\mathscr{L}_n$ de réunions finies de parallélogrammes par induction, de la façon suivante. On pose

$$\mathscr{L}_0 = \{R\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L}_{n+1} = \{f_i(P),\ P \in \mathscr{L}_n,\ i=1, 2\}.$$

Compte tenu des propriétés déjà décrites, on voit que les éléments de $\mathscr{L}_n$ sont tous égaux, la longueur de leur côté vertical étant $a_n = l/2^n$, la longueur de leur projection horizontale étant $b_n = L((1/2)+\theta)^n$, la pente de leurs côtés non verticaux étant $t_n = (l/2\theta L)(1-(1/(1+2\theta))^n)$. Puisque $\lim t_n = l/2\theta L > \operatorname{tg} \xi$, il existe m tel que $t_m > \operatorname{tg} \xi$. On désigne par L la réunion des éléments de $\mathscr{L}_m$ et K la réunion de L et des deux carrés C_1 et C_2 de côté l situés aux extrémités de R. On va montrer que K est le compact cherché.

Tout d'abord, on voit par induction qu'une droite de pente $\leqslant 0$ qui rencontre R rencontre pour tout n un élément de $\mathscr{L}_n$. Une droite de pente $\geqslant \operatorname{tg} \xi'$ qui rencontre R sans rencontrer C_1 et C_2 rencontre les deux côtés horizontaux de R. Compte tenu du fait que

$$t_n + \frac{a_n}{2\theta b_n} = \frac{l}{2\theta L} \leqslant \operatorname{tg} \xi',$$

on voit par induction qu'elle rencontre pour chaque η un parallélogramme de $\mathscr{L}_n$ en ses deux côtés non verticaux. Le point (ii) est donc établi.

Soit maintenant $0 \leqslant \beta \leqslant \xi$ et n tel que $t_n \leqslant \operatorname{tg} \xi < t_{n+1}$. On a

$$h_\beta(K) \leqslant h_\beta(C_1) + h_\beta(C_2) + h_\beta(L) \leqslant 4l + h_\beta(L).$$

Il y a 2^n parallélogrammes dans $\mathscr{L}_n$, et $\mathscr{L}_{n-1}$ est l'ensemble des $f_1(P)$, $f_2(P)$ pour $P \in \mathscr{L}_n$. La mesure de la projection sur l'axe des ordonnées de $f_1(P) \cup f_2(P)$ parallèlement à une droite de pente t est $\leqslant a_n = 2^{-n} l$ comme nous l'avons vu. Puisque L est inclus dans la réunion de $\mathscr{L}_{n+1}$, on a

$$h_\beta(L) \leqslant \cos\beta \times 2^{-n} l \times 2^n \leqslant l.$$

C.Q.F.D.

Lemme 7. — *Soit K un compact élémentaire, F un fermé de $[0, \pi]$, avec $0 \in F$ si et seulement si $\pi \in F$ et U un ouvert contenant F. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un compact élémentaire $L \subseteq K$ tel que $h_\beta(L) \leqslant \varepsilon$ pour $\beta \in F$ et $h_\beta(L) \geqslant h_\beta(K) - \varepsilon$ pour $\beta \in U$.*

Preuve. — Puisqu'il existe une réunion finie d'intervalles du type $[\alpha, \alpha + \xi]$ avec $\xi < \pi/2$, contenant F et contenue dans U, on se ramène par induction au cas où F est de cette forme. Il existe alors ξ tel que

$$[\alpha, \alpha + \xi'] \subset U \qquad \text{avec} \quad \xi < \xi' < \frac{\pi}{2}.$$

On applique alors les lemmes 5 (avec la direction α) et 6.

Lemme 8. — *Soit K un compact élémentaire, F un fermé et U un ouvert de $[0, \pi]$, avec $0 \in F$ si et seulement si $\pi \in F$. Soient $\varepsilon > 0$ et $a \geqslant 0$. Il existe alors un compact élémentaire $L \subset K$ avec $h_\beta(L) \leqslant a + \varepsilon$ pour $\beta \in F$ et $h_\beta(L) \geqslant \operatorname{Inf}(h_\beta(K), a) - \varepsilon$ pour $\beta \in U$ et $h_\beta(L) \geqslant h_\beta(K) - \varepsilon$ pour $\beta \notin U$.*

Preuve. — Écrivons $K = \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ où chaque K_i est un compact élémentaire de diamètre $\leqslant \varepsilon/2$. Pour $p \leqslant N$, soit $K^p = \bigcup_{i \leqslant p} K_i$. Soit $\eta < \varepsilon (2 N \times \text{diamètre}(K))^{-1}$ assez petit pour que $\alpha \in F$, $|\beta - \alpha| \leqslant \eta \Rightarrow \beta \in U$. Posons pour $p \leqslant N$:

$$F_p = \left\{ \alpha \in F;\, h_\alpha(K^p) \geqslant a + \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

$$U_p = \left\{ \beta \in [0, \pi];\, \exists\, \alpha \in F_p,\, |\beta - \alpha| < \eta \right\}.$$

D'après le lemme 7 il existe pour tout p un compact élémentaire $L_p \subset K_p$ tel que

$$h_\alpha(L_p) \leqslant \frac{\varepsilon}{2N} \qquad \text{pour} \quad \alpha \in F_p$$

et

$$h_\alpha(L_p) \geqslant h_\alpha(K_p) - \frac{\varepsilon}{2N} \qquad \text{pour} \quad \alpha \notin U_p.$$

On va montrer que $L = \bigcup_{i \leqslant N} L_i$ convient.

Soit $\alpha \in F$. Si $h_\alpha(K) \leqslant a+\varepsilon$, alors $h_\alpha(L) \leqslant a+\varepsilon$. Sinon soit p le plus petit entier tel que $\alpha \in F_p$. Puisque $\alpha \notin F_{p-1}$, on a

$$h_\alpha(K^{p-1}) < a+\frac{\varepsilon}{2}$$

et ainsi

$$h_\alpha(L) \leqslant h_\alpha(K^{p-1}) + \sum_{i \geqslant p} h_\alpha(L_i) \quad \leqslant a+\frac{\varepsilon}{2}+N \times \frac{\varepsilon}{2N} \leqslant a+\varepsilon.$$

Soit $\alpha \in U$. Si α n'appartient à aucun U_p, on a

$$h_\alpha(L) \geqslant h_\alpha(K) - \sum_{i \leqslant N} (h_\alpha(K_i) - h_\alpha(L_i)) \quad \geqslant h_\alpha(K) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant h_\alpha(K) - \varepsilon.$$

Sinon soit p le plus petit entier tel que $\alpha \in U_p$. Il existe $\beta \in F_p$ avec $|\beta-\alpha| < \eta$. D'après le lemme 4, on a

$$h_\alpha(K^p) \geqslant a, \qquad \text{donc} \quad h_\alpha(K^{p-1}) \geqslant a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $\alpha \notin U_{p-1}$, on a

$$h_\alpha(L) \geqslant h_\alpha\left(\bigcup_{i \leqslant p-1} L_i\right) \geqslant h_\alpha(K^{p-1}) - \sum_{i \leqslant p-1} (h_\alpha(K_i) - h_\alpha(L_i)) \geqslant a - \varepsilon.$$

Enfin si $\alpha \notin U$, α n'appartient à aucun U_p, et on a vu alors $h_\alpha(L) \geqslant h_\alpha(K) - \varepsilon$.

La preuve du lemme est terminée.

Prouvons le théorème. — Soit f une fonction $\geqslant 0$, s. c. s. de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, avec $f(0)=f(\pi)$. Soit (q_n) une énumération des rationnels de $[0, 1+\sup f]$ telle que chacun d'eux soit énuméré une infinité de fois. Pour chaque n, soit F_n l'adhérence de

$$\left\{\alpha;\ |\beta-\alpha| \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow f(\beta) < q_n - \frac{1}{n}\right\}$$

et

$$U_n = \left\{\alpha;\ \exists \beta \in F_n,\ |\beta-\alpha| < \frac{1}{2n}\right\}.$$

On a donc $f(\alpha) < q_n - 1/n$ sur U_n. Le lemme 7 permet de construire par induction une suite décroissante K_n de compacts élémentaires tels que pour tout n on a

$$h_\alpha(K_n) > f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad h_\alpha(K_n) \leqslant q_n + \frac{1}{n} \quad \text{sur } F_n.$$

Posons $K = \cap K_n$. C'est un compact élémentaire et $h_\alpha(K) \geqslant f(\alpha)$. Fixons α. Soit q un rationnel $> f(\alpha)$. Il existe n avec

$$q = q_n, \qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{q-\alpha}, \qquad |\beta - \alpha| \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow f(\beta) < q - \frac{1}{n},$$

on a donc

$$h_\alpha(K) \leqslant h_\alpha(K_n) \leqslant q + \frac{1}{n}$$

puisque $\alpha \in F_n$. Ainsi $h_\alpha(K) \leqslant f(\alpha)$. La preuve est terminée.

PROBLÈME 9. — Existe-t-il un compact K de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

(*a*) pour tout $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$ il existe $z \in \mathbb{R}$ avec $(x, y, z) \in K$;

(*b*) pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{ax + a^2 y + z;\ (x, y, z) \in K\}$ est de mesure nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] STEIN (E. M.) et WAINGER (S.). — Problems in harmonic analysis related to curvature, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 84, n° 4, 1978, p. 1239-1295.