Bull. Sc. math., 2e série,
103, 1979, p. 255-258.

EST-CE QUE l^∞ EST UN ESPACE MESURABLE?

PAR

MICHEL TALAGRAND (*)

[Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris]

RÉSUMÉ. On montre qu'il existe un espace de Banach non séparable dans lequel les opérations vectorielles sont mesurables pour la tribu borélienne forte, mais que l'énoncé correspondant pour l^∞ ne peut se décider à l'aide des axiomes usuels de la théorie des ensembles.

ABSTRACT. — We show that there always exists a non-separable Banach space for which the structure of vector space is compatible with the borel structure of the norm topology. However, the corresponding statement concerning l^∞ can't be deduced from the usual axioms of set theory.

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une tribu sur E. On dit que $(E, \mathscr{F})$ est un espace vectoriel mesurable si l'application de $\mathbf{R}\times E\times E$ dans E qui envoie (λ, x, y) en $\lambda x+y$ est mesurable lorsque $\mathbf{R}\times E\times E$ est muni de la tribu $\mathscr{B}(\mathbf{R})\otimes\mathscr{F}\otimes\mathscr{F}$ et E de la tribu $\mathscr{F}$ (ou $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ désigne la tribu des boréliens de $\mathbf{R}$). On supposera dans toute la suite que E est un espace normé et que $\mathscr{F}$ est la tribu $\mathscr{B}(E)$ des boréliens de E pour la topologie de la norme. Puisque $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ est à base dénombrable, on a

$$\mathscr{B}(\mathbf{R})\otimes\mathscr{B}(E)=\mathscr{B}(\mathbf{R}\times E)$$

et ainsi on voit sans peine que E est un espace vectoriel mesurable si et seulement si l'application somme de $E\times E$ dans E est mesurable.

(*) Texte présenté par G. Choquet, reçu le 9 mars 1978.

Michel TALAGRAND, Équipe d'Analyse, Tour 46, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES - 0007-4497/1979/255/$ 4.00

Lorsque E est séparable, on a

$$\mathscr{B}(E)\otimes\mathscr{B}(E)=\mathscr{B}(E\times E)$$

et ainsi E est un espace vectoriel mesurable.

Mais est-il possible que E soit mesurable s'il n'est pas séparable? (ce problème est dû à Hoffmann-Jørgensen [1]). Désignons par $\alpha(E)$ le caractère de densité de E, c'est-à-dire le plus petit cardinal α tel que E contienne une partie dense de cardinal α. Désignons par $\mathfrak{P}(I)$ l'ensemble des parties d'un ensemble I.

THÉORÈME 1. — *Pour un espace normé E, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *E est un espace vectoriel mesurable;*

(*b*) $\mathscr{B}(E\times E)=\mathscr{B}(E)\otimes\mathscr{B}(E)$;

(*c*) *si $\alpha=\alpha(E)$, on a* $\mathfrak{P}(\alpha\times\alpha)=\mathfrak{P}(\alpha)\otimes\mathfrak{P}(\alpha)$.

Démonstration. — (*a*) $\Rightarrow$ (*c*). — Par induction sur l'ordinal $\beta<\alpha$ construisons des points x_β et y_β de E vérifiant la propriété suivante :

$$(1)\qquad \forall\gamma,\ \delta,\ \gamma',\ \delta'\leqslant\beta$$

on a

$$(\gamma,\delta)\neq(\gamma',\delta')\ \Rightarrow\ \|x_\gamma+y_\delta-x_{\gamma'}-y_{\delta'}\|\geqslant 1.$$

Pour ce faire, on commence avec $x_0=y_0=0$, puis on suppose la construction effectuée pour tout ordinal $\gamma<\beta<\alpha$. Le sous-espace fermé F engendré par les $(x_\gamma)_{\gamma<\beta}$ et les $(y_\gamma)_{\gamma<\beta}$ est tel que $\alpha(F)\leqslant\beta<\alpha$ et donc que $F\neq E$. Soit f une forme linéaire non nulle sur E, de norme <1, qui est nulle sur F. On vérifie sans peine qu'il suffit de prendre x_β tel que $f(x_\beta)=1$ et γ_β tel que $f(y_\beta)=2$, ce qui termine la construction.

Désignons par X (resp. Y) l'ensemble des x_β (resp. y_β) pour $\beta<\alpha$. La condition (1) montre que l'application somme φ de $E\times E$ dans E est injective lorsqu'on la restreint à $X\times Y$, et que $X+Y$ est fermé discret. Soit A une partie quelconque de $X\times Y$. Alors $\varphi(A)$ est fermé, donc borélien. Par hypothèse, $B=\overset{-1}{\varphi}(\varphi(A))\in\mathscr{B}(E)\otimes\mathscr{B}(E)$. On a donc

$$A=B\cap(X\times Y)\in\mathscr{B}(E)\otimes\mathscr{B}(E)\cap(X\times Y)\subset\mathfrak{P}(X)\otimes\mathfrak{P}(Y),$$

ce qui prouve le résultat puisque $\alpha=\text{card}.\ X=\text{card}.\ Y$ (*c*) $\Rightarrow$ (*b*). Nous allons prouver que tout ouvert V de $E\times E$ appartient à $\mathscr{B}(E)\otimes\mathscr{B}(E)$.

Montrons tout d'abord (ce
il existe une partition $\mathscr{A}_n$ de I
de sorte que toute réunion d'
considérons une partie $(x_\beta)_\beta$
pour $\beta<\alpha$:

$$A_\beta=B\Big($$

où $B(x,r)$ désigne la boule o
ensemble d'ordinaux $<\alpha$, on

$$\bigcup_{\beta\in I}A_\beta=\bigcup_{p>n}\bigcup_{\beta}$$

et ainsi cet ensemble est un F
$\mathscr{A}_n$ l'ensemble de ceux des A_β

Posons

$$I_n=\{(A,B$$

Puisque V est ouvert, on a

$$V=$$

Il suffit donc de prouver qu

$$\bigcup_{(A,B)\in I_n}$$

Mais puisque par hypothèse

$$I_n$$

tout résulte de ce que pour I

$$\bigcup_{(A,B)\in I\times J}A\times B=$$

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) est évident.

Le résultat précédent est fr
car dire que E est un espace v
à dire que *certains* boréliens

Montrons tout d'abord (ce qui est bien connu), que pour tout $n > 0$ il existe une partition $\mathcal{A}_n$ de E en au plus α ensembles de diamètre $\leqslant 1/n$, de sorte que toute réunion d'ensembles de $\mathcal{A}_n$ soit borélienne. Pour cela considérons une partie $(x_\beta)_{\beta < \alpha}$, de cardinal α, dense dans E, et posons pour $\beta < \alpha$:

$$A_\beta = B\left(x_\beta, \frac{1}{n}\right) \setminus \bigcup_{\gamma < \beta} B\left(x_\gamma, \frac{1}{n}\right),$$

où $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r. Si I est un ensemble d'ordinaux $< \alpha$, on a

$$\bigcup_{\beta \in I} A_\beta = \bigcup_{p > n} \bigcup_{\beta \in I} \left[\overline{B\left(x_\beta, \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)} \setminus \bigcup_{\gamma < \beta} B\left(x_\gamma, \frac{1}{n}\right) \right]$$

et ainsi cet ensemble est un F_σ, donc borélien. On peut donc prendre pour $\mathcal{A}_n$ l'ensemble de ceux des A_β qui ne sont pas vides.

Posons

$$I_n = \{(A, B); A, B \in \mathcal{A}_n, A \times B \subset V\}.$$

Puisque V est ouvert, on a

$$V = \bigcup_n \bigcup_{(A, B) \in I_n} A \times B.$$

Il suffit donc de prouver que pour tout n on a

$$\bigcup_{(A, B) \in I_n} A \times B \in \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E).$$

Mais puisque par hypothèse on a

$$I_n \in \mathfrak{P}(\mathcal{A}_n) \otimes \mathfrak{P}(\mathcal{A}_n),$$

tout résulte de ce que pour $I, J \in \mathfrak{P}(\mathcal{A}_n)$ on a

$$\bigcup_{(A, B) \in I \times J} A \times B = \bigcup_{A \in I} A \times \bigcup_{B \in J} B \in \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E).$$

$(b) \Rightarrow (a)$ est évident.

C.Q.F.D.

Le résultat précédent est frappant; en particulier l'implication $(a) \Rightarrow (b)$, car dire que E est un espace vectoriel mesurable équivaut seulement *a priori* à dire que *certains* boréliens de $E \times E$ sont dans $\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$.

Désignons par $R(\alpha)$ l'énoncé $\mathfrak{P}(\alpha \times \alpha) = \mathfrak{P}(\alpha) \otimes \mathfrak{P}(\alpha)$. La validité en est étudiée en détail par K. Kunen [2].

Il montre en particulier que $R(\aleph_1)$ est toujours vrai et que $R(\alpha)$ implique $\alpha \leqslant \mathfrak{C} = \text{card. } \mathbf{R}$. On a donc :

THÉORÈME 2. — *Il existe un espèce de Banach mesurable non séparable.*

THÉORÈME 3. — *Sous l'hypothèse du continu, un espace normé est un espace mesurable si et seulement s'il est de cardinal* $\mathfrak{C}$.

Lorsque l'on n'admet plus l'hypothèse du continu, alors Kunen montre que $R(\mathfrak{C})$ est indépendant des axiomes usuels de la théorie des ensembles, même quand on les renforce par l'axiome du choix et la négation de l'hypothèse du continu. On a ainsi par exemple :

THÉORÈME 4. — *L'énoncé « l^∞ est un espace mesurable » découle, de l'hypothèse du continu, mais est indépendant des axiomes usuels de la théorie des ensembles, même si on les renforce par l'axiome du choix et la négation de l'hypothèse du continu.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOFFMANN-JØRGENSSEN (J.). — *Probabilities in a B space*, Aarhus University preprints, 1977.

2] KUNEN (K.). — *Ph D Dissertation*, Stanford, 1968.

[